第32講　式の値と実数解条件

32 次の各問いに答えよ．

(1) $x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ の値の範囲を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta}$ の値の範囲を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第32講　式の値と実数解条件

32 x の関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ に関して次の各問いに答えよ．

(1) x がすべての実数値をとるとき，$f(x)$ の値の範囲を求めよ．

(2) x が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くとき，$f(x)$ の値の範囲を求めよ．

【選択肢】

(1) ㋐ $-\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$　㋑ $-\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{3}$　㋒ $-\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$

(2) ㋐ $\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{3}$　㋑ $\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$　㋒ $\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 32 講　式の値と実数解条件

32　次の各問いに答えよ．

(1)　$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ の値の範囲を求めよ．

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$\dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta}$ の値の範囲を求めよ．

【答】 (1) $-1 \leqq \dfrac{x-1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$　(2) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \leqq \dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta} \leqq 1$

【解答】

(1)　$\dfrac{x-1}{x^2+x+1}=k$ とおき，この x の方程式が $x \geqq 0$ に実数解をもつ条件を考える．

$x-1=k(x^2+x+1)$ より　$kx^2+(k-1)x+k+1=0$　……①　となる．

(Ⅰ)　$k=0$ のとき，①は $x=1$ となり，$x \geqq 0$ に実数解をもつ．

(Ⅱ)　$k \neq 0$ のとき，$K=\dfrac{1}{k}$ とおくことで①は　$x^2+(1-K)x+1+K=0$　……②　と変形できる．

ここで $f(x)=x^2+(1-K)x+1+K$ とおくと，$f(x)=\left(x-\dfrac{K-1}{2}\right)^2-\dfrac{K^2-6K-3}{4}$

となるので，②が $x \geqq 0$ に実数解をもつ条件は

「$\dfrac{K-1}{2} \leqq 0$ かつ $f(0) \leqq 0$」　または　「$\dfrac{K-1}{2} > 0$ かつ $-\dfrac{K^2-6K-3}{4} \leqq 0$」

であるから，これらより $K \leqq -1$，$K \geqq 3+2\sqrt{3}$ を得る．

よって $-1 \leqq k < 0$，$0 < k \leqq \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$ となる．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より求める範囲は $\boldsymbol{-1 \leqq \dfrac{x-1}{x^2+x+1} \leqq \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}$

(2)　$\dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta}=k$　……③　とおき，この θ の方程式が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に実数解をもつ条件を考える．

③は

$$\sin\theta-k\cos\theta=2-3k$$

と変形できるが，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるので，$k>0$ となるから，$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$ かつ $\tan\alpha=-k$ を満たす実数 α を用いて

$$\sin\theta-k\cos\theta=\sqrt{1+k^2}\sin(\theta+\alpha)$$

と変形できる．ここで，$\alpha \leqq \theta+\alpha \leqq \pi+\alpha$ より $\sqrt{1+k^2}\sin(\theta+\alpha)$ は $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{1+k^2}$，$\theta+\alpha=\alpha$ すなわち $\theta=0$ のとき最小値 $-k$ をとるので，③が実数解をもつ条件は

$$-k \leqq 2-3k \leqq \sqrt{1+k^2}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

である．

$-k \leqq 2-3k$ より $k \leqq 1$

$2-3k \leqq \sqrt{1+k^2}$ より $2-3k<0$ または $2-3k \geqq 0$，$(2-3k)^2 \leqq 1+k^2$ であるので

$k \geqq \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ を得る．

以上より求める範囲は $\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \leqq \dfrac{2-\sin\theta}{3-\cos\theta} \leqq 1}$

第 32 講　式の値と実数解条件

32　x の関数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ に関して次の各問いに答えよ．

(1)　x がすべての実数値をとるとき，$f(x)$ の値の範囲を求めよ．

(2)　x が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くとき，$f(x)$ の値の範囲を求めよ．

【選択肢】

(1)　㋐　$-\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$　㋑　$-\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{3}$　㋒　$-\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$

(2)　㋐　$\dfrac{1}{4}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{3}$　㋑　$\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$　㋒　$\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}$

【答】　(1) ㋐　(2) ㋒

【解答】

(1)　$f(x)=k$ すなわち　$kx^2-x+3k-1=0$　……①　が実数解をもつような k の条件を求めればよい．

(Ⅰ)　$k=0$ のとき，①は $-x-1=0$ すなわち $x=-1$ という実数解をもつ．

(Ⅱ)　$k\neq 0$ のとき，①の判別式を考えると $(-1)^2-4k(3k-1)\geqq 0$ より $(6k+1)(2k-1)\leqq 0$

よって $-\dfrac{1}{6}\leqq k<0$，$0<k\leqq\dfrac{1}{2}$

(Ⅰ)，(Ⅱ)より $-\dfrac{1}{6}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$　よって求める値域は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{6}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}}$

(2)　(1)と同様に考えて　$kx^2-x+3k-1=0$　……①　が $0\leqq x\leqq 1$ に実数解をもつような k の条件を求めればよい．

(Ⅰ)　$k=0$ のとき，①は $-x-1=0$ すなわち $x=-1$ という実数解をもつが，$0\leqq x\leqq 1$ に適さない．

(Ⅱ)　$k\neq 0$ のとき，①は $x^2+3=\dfrac{1}{k}(x+1)$ となるが，放物線 $y=x^2+3$ の $x=1$ における接線は $y'=2x$ より $y=2(x-1)+4$ すなわち $y=2x+2$ となることと，2 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 3)$ を通る直線の傾きが 3 であることより，$2\leqq\dfrac{1}{k}\leqq 3$ すなわち $\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$

(Ⅰ)，(Ⅱ)より $\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$　よって求める値域は $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\leqq f(x)\leqq\dfrac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。